Simulare, Bacalaureat, 12 decembrie 2024
Proba E. c) Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică – informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $log_2(\sqrt{5}-1)+log_2(\sqrt{5}+1)=2$.

5p **2** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x-m^2$. Determinați numărul real m, știind că distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axa Ox este egală cu 3.

5p **3** Rezolvați ecuația $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=12$.

5p **4** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de 3 cifre distincte, cu cifre nenule, acesta să fie număr par.

5p **5** Să se determine numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+(a+3)\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6** În ΔABC, dacă $AC=6\ cm$, $m(\hat{C})=15^0$, $m(\hat{B})=45^0$, arătați că $BC=3\sqrt{6}$ cm

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+y-z=1 \\ ax+y-z=a-1 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$, a parametru real.

5p **a)** Determinați numărul real a astfel încât sistemul să aibă soluție unică.

5p **b)** Dacă $a\neq 2$, rezolvați sistemul de ecuații.

5p **c)** Dacă $a=2$, determinați soluția sistemului (x_0,y_0,z_0) având componentele întregi, pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=6$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x\circ y=axy-x-y+6$.

5p **a)** Determinați numărul real a, pentru care $1\circ 3=11$

5p **b)** Să se determine numărul real a știind că legea admite element neutru.

5p **c)** Să se arate că dacă intervalul $[0,6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$ ”, atunci $a\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln x$, pentru $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $m\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M(m,f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x$.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2 Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} xe^x, x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1}, x>0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați o primitivă a funcției f știind că graficul primitivei trece prin punctul de coordonate $A\left(-1,-\dfrac{2}{e}\right)$.

5p **c)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

Simulare, Bacalaureat, 12 decembrie 2024
Proba E. c) Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE ***Simulare***

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică – informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$log_2(\sqrt{5}-1)+log_2(\sqrt{5}+1)=log_2(5-1)$ $log_2 4=2$	**3p** **2p**
2.	$\Delta = 1+4m^2>0 \Rightarrow x_{1/2}\in\mathbb{R}$ și $\lvert x_1-x_2\rvert=3 \Rightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=9$ $x_1+x_2=-1$ și $x_1x_2=-m^2 \Rightarrow 1+4m^2=9 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$	**2p** **3p**
3.	$2^x+2^{x+1}=12$ $2^x=4 \Rightarrow x=2$	**2p** **3p**
4.	$a,b,c\in\{1,2,3,\dots,9\}$ și $a\neq b\neq c \Rightarrow$ Numărul cazurilor posibile este $A_9^3=9\cdot 8\cdot 7=504$ c este cifră pară $\Rightarrow$ $c\in\{2,4,6,8\}$ $\Rightarrow$ Numărul cazurilor favorabile este $4A_8^2=4\cdot 8\cdot 7 \Rightarrow P=\frac{4}{9}$	**2p** **3p**
5.	$\frac{2}{a+1}=\frac{a+3}{3} \Rightarrow a^2+4a-3=0$ $a=-2\pm\sqrt{7}$	**3p** **2p**
6.	$m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^0 \Rightarrow m(\hat{A})=120^0$ și $\sin A=\sin 120^0=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ T. sin $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A} \Rightarrow BC=3\sqrt{6}$ cm	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=-2x+4$ $\det A\neq 0 \Rightarrow a\neq 2 \Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$	**2p** **3p**
b)	$\det A\neq 0 \Rightarrow \Delta x=-2a+4$, $\Delta y=-2a+4$, $\Delta z=-4a+8$ $(x,y,z)=(1,1,2)$	**3p** **2p**
c)	Minor principal $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, $\Delta car=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow rang A=rang\,\bar{A}=2$, $z=\alpha$ $(x_0,y_0,z_0)=(2\alpha-3,7-3\alpha,\alpha)$ unde $\alpha\in\mathbb{R}$ $x_0^2+y_0^2+z_0^2=6 \Rightarrow (2\alpha-3)^2+(7-3\alpha)^2+\alpha^2=6$ Din care convine $\alpha=2$ și avem $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$	**3p** **2p**
2.a)	$1\circ 3=11 \Rightarrow 3a-4+6=11$ $a=3$	**3p** **2p**
b)	$x\circ e=e\circ x=x$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, dar $x\circ e=e\circ x$ se verifică oricare ar fi $a,e,x\in\mathbb{R}$ din $x\circ e=x \Rightarrow (ae-2)x-e+6=0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R} \Rightarrow e=6$ și $a=\frac{1}{3}$	**2p** **3p**

c)	Din $([0,6],\circ)$ parte stabilă a lui $(\mathbb{R},\circ) \Leftrightarrow 0 \le (ay-1)x - y + 6 \le 6\ (\forall)x, y \in [0,6]$ Fie $f:[0,6]\to[0,6],\ f(x)=(ay-1)x-y+6$ unde $a\in\mathbb{R}$ și $y\in[0,6]$ $\begin{cases} f(0)=6-y\in[0,6], \\ f(6)=(6a-1)y\in[0,6] \end{cases} \Leftrightarrow 0\le(6a-1)y\le 6, (\forall)y\in[0,6]$	**2p**
	Fie $g:[0,6]\to[0,6],\ g(y)=(6a-1)y$ cu $g(0)=0$ și $g(6)=36a-6\in[0,6]\Rightarrow a\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\cdot\ln x + x(\ln x)' =$	**2p**
	$=\ln x + x\frac{1}{x} = 1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției în $M\,(m, f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x \Leftrightarrow f'(m)=2$	**3p**
	$1+\ln m = 2 \Rightarrow m=e$	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(\frac{1}{e},\infty\right)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$	**3p**
	deci $f(x)\ge-\frac{1}{e}$, deci $x\ln x+\frac{1}{e}\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	Pentru $x\le 0$, f este continuă ca produs de functii continue. Pentru $x>0$, f este continuă ca raport de funcții continue $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xe^x = 0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2}{x+1} = 0$, $f(0)=0$	**3p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.	**2p**
b)	Constructia primitivei $F(x)=\begin{cases}(x-1)\cdot e^x + c_1, x\le 0\\ \frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+c_2, x>0\end{cases}$ Din continuitatea funcției F pe $\mathbb{R}$, obținem $-1+c_1=c_2$ și notăm $c_2=k\in\mathbb{R}$ și avem $F(x)=\begin{cases}(x-1)\cdot e^x+1+k, x\le 0\\ \frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+k, x>0\end{cases}$	**2p**
	din $A\left(-1,-\frac{2}{e}\right)\in G_F \Rightarrow F(-1)=-\frac{2}{e}\Rightarrow -2\cdot e^{-1}+1+k=-\frac{2}{e}\Rightarrow k=-1$ si primitiva cerută este $F(x)=\begin{cases}(x-1)\cdot e^x, x\le 0\\ \frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)-1, x>0\end{cases}$	**3p**
c)	Pe intervalul $(0,\infty)$ derivata primitivei este $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ care este pozitivă,	**3p**
	deci primitiva functiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$	**2p**